ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION M'&P'

CONCOURS D'ADMISSION 1980

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4h)

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles muni de sa structure usuelle d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$:

$$\forall X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}, \quad \forall Y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

$$X + Y = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \lambda X = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

On considère la partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{S}$ constituée des suites $X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n .$$

1 - a) Vérifier que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$. Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

b) Les deux suites $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ et $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ définies par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $v_0 = 2$, $v_1 = 1$ constituent-elles une base de $\mathcal{E}$?

c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les relations

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n, \quad v_{n+1} = \frac{5}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n,$$

puis la relation $5u_n^2 - v_n^2 = 4(-1)^{n+1}$.

2 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer u_{2n+1} et v_{2n+1} en fonction de u_n et v_n à l'aide des formules

(1) $$u_{2n} = u_n v_n, \quad v_{2n} = v_n^2 - 2(-1)^n$$

et des résultats précédents, et en déduire la validité des formules (1) pour tout entier $n \geqslant 0$.

.../...

II

L'objet de cette partie est de décrire pour les suites U et V une méthode de calcul numérique commodément exploitable sur ordinateur.

On rappelle que la représentation binaire de l'entier $n \geqslant 0$ est l'unique suite $(b_i(n))_{i \in \mathbb{N}-\{0\}}$ de nombres $b_i(n) \in \{0,1\}$ telle que $n = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i(n)\, 2^{i-1}$.

1 - a) Calculer en fonction de l'entier $n \geqslant 1$ le plus grand des indices i tels que $b_i(n) = 1$ (on utilisera la notation $[\,t\,]$ pour désigner le plus grand entier inférieur ou égal au réel t).

b) *En notant désormais* $\beta(n)$ le plus grand indice i en question, calculer $\beta(39)$.

2 - Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère la suite finie $n_1, \ldots, n_{\beta(n)}$ définie par $n_1 = b_{\beta(n)}(n)$ et, pour tout entier $i \in [1, \beta(n)[$,

$$n_{i+1} = 2\, n_i + b_{\beta(n)-i}(n).$$

a) Vérifier que $n = n_{\beta(n)}$.

b) Pour tout entier $i \in [1, \beta(n)[$, exprimer $u_{n_{i+1}}$ et $v_{n_{i+1}}$ en fonction de u_{n_i} et v_{n_i}, en tenant compte de la valeur de $b_{\beta(n)-i}(n)$.

3 - Employer la technique qui vient d'être décrite pour calculer numériquement u_{39} et v_{39} (on indiquera le détail des calculs utilisés).

III

Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction S définie sur $\mathbb{N}$ par $S(0) = 0$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, par

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} b_i(k) \right).$$

$S(n)$ est donc égal au nombre d'interventions du nombre 1 dans les représentations binaires des n entiers consécutifs $0, 1, \ldots, n-1$. On posera, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$s(k) = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i(k).$$

.../...

1 - a) Etablir pour tout $n \in \mathbb{N}$ les relations

$$S(2n) = 2\,S(n) + n \quad \text{et} \quad S(2n+1) = 2\,S(n) + n + s(n) .$$

b) Calculer la valeur de $S(53)$.

c) Donner, pour tout entier $p \geqslant 1$, une expression explicite de $S(2^p)$.

2 - Pour tous les entiers $i \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$, on pose

$$B_i(n) = \sum_{k=0}^{n-1} b_i(k) .$$

a) Montrer que

$$B_1(n) = \frac{n}{2} + \varphi\left(\frac{n}{2}\right) \quad \text{et} \quad B_2(n) = \frac{n}{2} + 2\,\varphi\left(\frac{n}{4}\right)$$

où φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire et de période 1, telle que $\varphi(\xi) = -\xi$ pour tout $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$.

b) Tracer les graphes des fonctions $x \longmapsto \frac{x}{2} + \varphi\left(\frac{x}{2}\right)$ et $x \longmapsto \frac{x}{2} + 2\,\varphi\left(\frac{x}{4}\right)$.

c) Donner au moyen de la fonction φ une expression de $B_i(n)$.

d) En déduire l'égalité

$$S(n) = \frac{n\,\beta(n)}{2} + 2^{\beta(n)} \sum_{j=1}^{\beta(n)} \frac{1}{2^j}\,\varphi\left(\frac{n}{2^{\beta(n)}}\,2^{j-1}\right) .$$

3 - Pour tout réel x, on pose

$$f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j}\,\varphi\left(2^{j-1}\,x\right) .$$

a) En notant $\log_2 x$ le logarithme de base 2 du réel $x > 0$, exprimer pour tout entier $n \geqslant 1$ la différence $\frac{S(n)}{n} - \frac{1}{2}\log_2 n$ à l'aide de f et de θ, où $\theta = \beta(n) - \log_2 n$.

b) En déduire un infiniment grand simple équivalent à $S(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

[M' seulement]

4 - Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = \frac{x}{2} \log_2 x$.

a) Quel est le sens de la concavité du graphe de la fonction g ?

b) Comparer, pour tout entier $n \geqslant 1$, les positions par rapport à 0 des différences $g(n) - S(n)$ et $g(2n) - S(2n)$.

c) On suppose qu'il existe des entiers impairs $2n + 1$ strictement plus grands que 1 tels que $S(2n + 1) \geqslant g(2n + 1)$, et on note $2m + 1$ le plus petit d'entre eux. Trouver, sous ces hypothèses, les signes de $g(2m) - S(2m)$ et de $g(2m + 2) - S(2m + 2)$ et en déduire, à l'aide de valeurs convenables de la dérivée g' de g, une minoration et une majoration de $s(m)$. L'hypothèse initiale de cette question est-elle justifiée ?

d) Déterminer le signe de la fonction $g - S$ sur l'ensemble des entiers strictement positifs, et les entiers pour lesquels cette fonction est nulle.

5 - a) Etablir la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'elle n'est dérivable en aucun point x de $\mathbb{R}$ (on pourra étudier successivement les cas $x = 0$, $x = \frac{r}{2^p}$ avec $r \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$ et enfin x réel quelconque).

[P' seulement]

4 - Pour tout entier $p \geqslant 0$, on pose $n_p = \sum_{q=0}^{p} 2^{2q}$. Comparer $S(n_p)$ et $p\, n_p$. Calculer à 10^{-4} près la limite lorsque p tend vers $+\infty$ de $\frac{S(n_p)}{n_p} - \frac{1}{2} \log_2 n_p$.

5 - Montrer que la fonction f n'est dérivable en aucun point x de $\mathbb{R}$ (on pourra étudier successivement les cas $x = 0$, $x = \frac{r}{2^p}$ avec $r \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$ et enfin x réel quelconque).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail